Unidad II

Teoría de líneas de espera

2.1. Estructura básica de los modelos de líneas

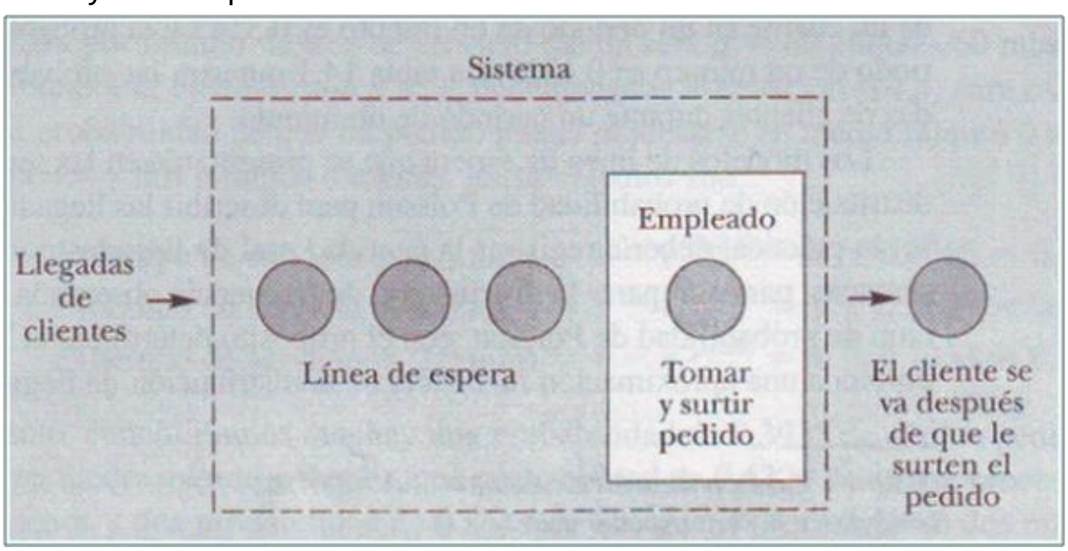
Los modelos de línea de espera consisten en fórmulas y relaciones matemáticas que pueden usarse para determinar las características operativas (medidas de desempeño) para una cola.
Las características operativas de interés incluyen las siguientes:
Probabilidad de que no haya unidades o clientes en el sistema
Cantidad promedio de unidades en la línea de espera
Cantidad promedio de unidades en el sistema (la cantidad de unidades en la línea de espera más la cantidad de unidades que se están atendiendo)
Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera
Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema (el tiempo de espera más el tiempo de servicio)
Probabilidad que tiene una unidad que llega de esperar por el servicio.

Los gerentes que tienen dicha información son más capaces de tomar decisiones que equilibren los niveles de servicio deseables con el costo de proporcionar dicho servicio.

ESTRUCTURA DE UN SISTEMA DE LINEA DE ESPERA

LINEA DE ESPERA DE UN SOLO CANAL

Cada cliente debe pasar por un canal, una estación para tomar y surtir el pedido, para colocar el pedido, pagar la cuenta y recibir el producto. Cuanto llegan más clientes forman una línea de espera y aguardan que se desocupe la estación para tomar y surtir el pedido.



DISTRIBUCIÓN DE LLEGADAS

Para determinar la distribución de probabilidad para la cantidad de llegadas en un período dado, se puede utilizar la distribución de Poisson.

/= Media o cantidad promedio de ocurrencia en un intervalo
e= 2.17828
X= cantidad de ocurrencias en el intervalo

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

DISTRIBUCIÓN DE TIEMPO DE SERVICIO

El tiempo de servicio es el tiempo que pasa un cliente en la instalación una vez el servicio ha iniciado.
Se puede utilizar la distribución de probabilidad exponencial para encontrar la probabilidad de que el tiempo de servicio sea menor o igual que un tiempo t.

e= 2.17828
μ= cantidad media de unidades que pueden servirse por período

$$P(\text{tiempo de servicio} \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

2.2. de espera.

DISCIPLINA DE LA LINEA DE ESPERA

Manera en la que las unidades que esperan el servicio se ordenan para recibirlo.
El primero que llega, primero al que se le sirve
Último en entrar, primero en salir
Atención primero a la prioridad más alta

OPERACIÓN DE ESTADO ESTABLE

Generalmente la actividad se incrementa gradualmente hasta un estado normal o estable. El período de comienzo o principio se conoce como período transitorio, mismo que termina cuando el sistema alcanza la operación de estado estable o normal.

MODELOS DE LÍNEA DE ESPERA DE UN SOLO CANAL CON LLEGADAS DE POISSON Y TIEMPOS DE SERVICIO EXPONENCIALES

A continuación, las fórmulas que pueden usarse para determinar las características operativas de estado estable para una línea de espera de un solo canal.

El objetivo de las fórmulas es mostrar cómo se puede dar información acerca de las características operativas de la línea de espera.

1. Probabilidad de que no haya unidades en el sistema $$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$	5. Tiempo promedio que pasa una unidad en el sistema $$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$
2. Cantidad promedio de unidades en la línea de espera $$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$	6. Probabilidad de que una unidad que llega tenga que esperar por el servicio $$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$
3. Cantidad promedio de unidades en el sistema $$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$	7. Probabilidad de n unidades en el sistema $$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$
4. Tiempo promedio que pasa una unidad en la línea de espera $$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$	λ= cantidad promedio de llegadas por período μ = cantidad promedio de servicios por período

2.3. Patrones de llegada y de servicio.

En situaciones de cola habituales, la llegada es estocástica, es decir la llegada depende de una cierta variable aleatoria, en este caso es necesario conocer la distribución probabilística entre dos llegadas de cliente sucesivas. Además habría que tener en cuenta si los clientes llegan independiente o simultáneamente. En este segundo caso (es decir, si llegan lotes) habría que definir la distribución probabilística de éstos.

También es posible que los clientes sean “impacientes”. Es decir, que lleguen a la cola y si es demasiado larga se vayan, o que tras esperar mucho rato en la cola decidan abandonar.

Por último es posible que el patrón de llegada varíe con el tiempo. Si se mantiene constante le llamamos estacionario, si por ejemplo varía con las horas del día es no-estacionario.

Los servidores pueden tener un tiempo de servicio variable, en cuyo caso hay que asociarle, para definirlo, una función de probabilidad. También pueden atender en lotes o de modo individual.

El tiempo de servicio también puede variar con el número de clientes en la cola, trabajando más rápido o más lento, y en este caso se llama patrones de servicio dependientes. Al igual que el patrón de llegadas el patrón de servicio puede ser no-estacionario, variando con el tiempo transcurrido

2.4. Criterios bajo la distribución de Poisson y Exponencial para la selección del modelo apropiado de líneas de espera.

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

Fue descubierta por Siméon-Denis Poisson, que la dio a conocer en 1838 en su trabajo *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (*Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles*).

2.5. Aplicación de modelos de decisión en líneas de espera.

plicación de modelos de decisión en líneas de espera
Para la solución de los problemas que representa una cola de espera, la persona que administra un servicio puede recurrir a varias alternativas. Entre éstas, las más importantes son:

- Análisis subjetivo
- Método matemático
- Técnicas de simulación

Análisis subjetivo

Bajo este método se apela a la experiencia y al sentido común para encontrar un balance aproximado entre los costos de espera y de servicio sin tener que elaborar ningún cálculo. Por ejemplo, en un restaurante se planeará tener más meseros alrededor de las horas de las comidas o en un banco, asignar más cajeros en las horas o días picos.

Es importante anotar que esta alusión a lo subjetivo se refiere a la toma de decisión, es decir, se hace una análisis particular por parte de un tomador de decisiones con base en sus creencias, experiencias y conocimientos, pero con muy poca cuantificación del problema. Es decir, se confía en el «olfato» del personaje para este tipo de problemas. Esta visión de la subjetividad es diferente de la propuesta en el análisis que se hace más adelante de la subjetividad de quienes interactúan en el servicio, como parte de un todo, para evaluar su eficiencia
y calidad.

Método matemático

En este método se aplica la «teoría de colas» (modelos descriptivos y estadísticos). Existen varios tipos de modelos matemáticos de acuerdo con las condiciones y distintas presentaciones.
Los métodos matemáticos describen sistemas de línea de espera con diferentes características. Los modelos nos ayudan a encontrar un equilibrio entre los costos del sistema y los tiempos promedio de la línea de espera para un sistema dado.
Algunos estudio han llegado a la conclusión que, por término medio, un ciudadano promedio pasa cinco años de su vida esperando en distintas colas, y de estos cinco años casi seis meses esperando que cambie la luz en los semáforos

2.6. Solución analítica

Una de las razones por las que se ha elegido este problema de geometría sencilla es porque podemos conocer con exactitud la forma de la solución exacta. Esto nos va a permitir utilizar la solución exacta como referente para calcular los errores que se cometen con los distintos métodos utilizados para resolver el problema. Se trata de un sencillo problema de valores de contorno en coordenadas cartesianas (x,y) para el que el método de separación de variables nos proporciona una solución dada por:

$$T(x,y) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\, senh\,\frac{(a-y)(2n+1)\pi}{a}\cos ech(2n+1)\pi$$

En esta ecuación T_0=100ºC representa la temperatura del lado y=0 y a es el lado del cuadrado. El sistema de coordenadas se ha tomada según la fig.1.

Como vemos, la solución se expresa en función de una suma infinita. Sin embargo, para cualquier cálculo que queramos hacer de la temperatura en un punto (x,y) tomamos un número finito de sumandos lo que da lugar a un error de truncamiento, además del error de redondeo que se derive del número de operaciones para realizar la suma.

Se propone como ejercicio sumar la serie viendo el número de términos que es necesario utilizar para alcanzar una precisión mejor que 10^{-3}.